CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VII-a, TULCEA, 1 aprilie 2017

Clasa a VII - a

Soluţii orientative şi bareme

Problema 1.

Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ şi E este mijlocul laturii $[AD]$. Se construieşte trapezul $CEFG$ astfel încât $EF \parallel CG$, iar B este mijlocul segmentului $[FG]$. Arătaţi că trapezele $ABCD$ şi $CEFG$ au arii egale.

Dacă $[EN]$ este linia mijlocie a trapezului $ABCD$, atunci $A_{EBC} = \frac{EN \cdot d(C,EN)}{2} + \frac{EN \cdot d(B,EN)}{2} = \frac{A_{ABCD}}{2}$.	**3p**
Analog, dacă $[BM]$ este linia mijlocie a trapezului $CEFG$, atunci $A_{EBC} = \frac{MB \cdot d(C,MB)}{2} + \frac{MB \cdot d(E,MB)}{2} = \frac{A_{EFGC}}{2}$.	**3p**
Deducem că $A_{ABCD} = A_{EFGC}$.	**1p**

Problema 2.

Se consideră un număr prim p, $p \geq 5$, şi numerele $a,b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-2}$.

Arătați că numerele *a* și *b* dau același rest la împărțirea cu *p*.

Suma are $p-2$ termeni, deci $\frac{a}{b} - 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p-3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$ deoarece *p* este impar.	**2p**
Deci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a-b}{b} = \frac{p \cdot n}{(p-2)!}$.	**2p**
Deoarece *p* este număr prim rezultă $(p;(p-2)!) = 1$ și, din ultima relație deducem că $p \mid (a-b)$. În concluzie numerele *a* și *b* dau același rest prin împărțirea la *p*.	**3p**

Problema 3.

a) Arătaţi că există o singură pereche de numere naturale nenule (m,n) care este soluţie a ecuaţiei $2xy + x + y - 60 = 0$.

b) Arătaţi că, oricum am considera la întâmplare 21 de numere naturale nenule mai mici decât 30, există printre acestea un număr *a* pentru care ecuaţia $4xy + 2x + 2y + 1 - a^2 = 0$ are soluţie unică în mulţimea numerelor naturale nenule.

a) Ecuaţia dată este echivalentă cu $4xy+2x+2y+1=121$ sau $(2x+1)(2y+1)=11^2$	**2p**
Deoarece 11 este prim, iar $2x+1$ şi $2y+1$ sunt mai mari decât 1, rezultă că $2x+1=2y+1=11$, adică soluţia este $(m,n)=(5,5)$	**1p**
b) Ecuaţia este echivalentă cu $(2x+1)(2y+1)=a^2$ şi are soluţie unică numai dacă a este număr prim cel puţin egal cu 3.	**2p**
Deoarece există 9 numere prime cel puţin egale cu 3 şi mai mici decât 30, printre cele 21 numere considerate există cel puţin unul dintre aceste 9 numere prime pe care îl notăm cu a. Soluţia ecuaţiei rezultate va fi $\left(\frac{a-1}{2},\frac{a-1}{2}\right)$	**2p**

Problema 4.

Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $m(\widehat{BAD})=90^\circ$, iar $BD \cap AC=\{O\}$. Paralela prin O la bazele trapezului intersectează segmentele (AD) şi (BC) în punctele E şi respectiv F. Arătaţi că:

a) $\widehat{BEO} \equiv \widehat{CEO}$;

b) $EF=\frac{2\cdot AB\cdot DC}{AB+DC}<\frac{2\cdot EB\cdot EC}{EB+EC}$.

a) Din asemănarea triunghiurilor COD şi AOB obţinem $\frac{DO}{OB}=\frac{CO}{OA}=\frac{DC}{AB}$ (1), iar din *teorema lui Thales* aplicată în triunghiul DAB avem $\frac{DE}{EA}=\frac{DO}{OB}$ (2) Din (1) şi (2) deducem că triunghiurile DEC şi AEB sunt asemenea (LUL) . De aici rezultă că $\widehat{DEC} \equiv \widehat{AEB}$, deci complementele lor sunt congruente, adică $\widehat{CEO} \equiv \widehat{BEO}$.	**3p**
b) Din asemănarea triunghiurilor DEO şi DAB obţinem $\frac{DE}{DA}=\frac{EO}{AB}$ (3) . Analog, din asemănarea triunghiurilor CFO şi CBA obţinem $\frac{CF}{CB}=\frac{FO}{AB}$. Deoarece $\frac{DE}{DA}=\frac{DO}{DB}=\frac{CF}{CB}$, deducem $\frac{FO}{AB}=\frac{EO}{AB}$, deci $EO=OF$.	**2p**
Din asemănarea triunghiurilor AEO şi ADC avem $\frac{AE}{DA}=\frac{EO}{DC}$ (4) Prin adunare membru cu membru a relaţiilor (3) şi (4) obţinem $1=OE\cdot\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)$, relaţie echivalentă cu $EF=\frac{2\cdot AB\cdot DC}{AB+DC}$. A doua parte a concluziei se obţine din $AB<EB$ şi $DC<EC$	**2p**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VII-A, TULCEA, 1aprilie 2016

Soluţii orientative şi bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1.
Se consideră o mulţime nevidă M de numere reale nenule cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y, z \in M$, avem $xy + yz + zx \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b \in M$, avem $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Pentru $x = y = z = a \in M$, obţinem $3a^2 \in \mathbb{Q}$, deci $a^2 \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a \in M$.	**2p**
Pentru $x = b, y = z = a$, obţinem $a^2 + 2ab \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in M$.	**3p**
Deducem că $ab \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in M$, deci $\frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in M$.	**2p**

Problema 2.

a) Arătați că $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Determinați numerele reale $x, y \geq 0$ astfel încât $\begin{cases} [x]^2 + \{y\}^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ [y]^2 + \{x\}^2 \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \end{cases}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real a.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

a) Se obține prin echivalență $(a-b)^2 \geq 0$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $a = b$, sau se folosește inegalitatea dintre media aritmetică și media pătratică. **b)** Adunând membru cu membru cele două inegalități din ipoteză rezultă: $\left([x]^2 + \{x\}^2\right) + \left([y]^2 + \{y\}^2\right) \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ **(1)** Conform cu punctul **a)** obținem $[x]^2 + \{x\}^2 \geq \frac{([x] + \{x\})^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ **(2)** și analog $[y]^2 + \{y\}^2 \geq \frac{([y] + \{y\})^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. **(3)** Sumând ultimele două inegalități rezultă $\left([x]^2 + \{x\}^2\right) + \left([y]^2 + \{y\}^2\right) \geq \frac{x^2 + y^2}{2}$ și, ținând seama acum de relația **(1)**, deducem că $\left([x]^2 + \{x\}^2\right) + \left([y]^2 + \{y\}^2\right) = \frac{x^2 + y^2}{2}$, adică trebuie să avem egalitate în inegalitățile **(2)** și **(3)**.	

Prin urmare: $\begin{cases}[x]=\{x\}\\ [y]=\{y\}\end{cases}$, de unde rezultă în final că $x=y=0$.	

Problema 3.

Numerele reale nenule *a*, *b*, *c* şi *d* au module diferite şi verifică relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.

a) Arătaţi că $\frac{a+b}{a(c+d)}+\frac{a+c}{a(b+d)}+\frac{a+d}{a(b+c)}+\frac{b^2+c^2+d^2}{bcd}=0$;

b) Pentru $a=2$ şi $b=-3$, arătaţi că există $c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât numerele *a*, *b*, *c* şi *d* să verifice condiţiile din ipoteză.

Prelucrare, SGM nr.1/2017

a) Egalitateadin enunţ ne conduce la $\frac{a+b}{c+d}=-\frac{ab}{cd}$, $\frac{a+c}{b+d}=-\frac{ac}{bd}$, $\frac{a+d}{b+c}=-\frac{ad}{bc}$	**2p**
Înlocuind, obţinem prin calcul direct egalitatea cerută.	**1p**
b) Obţinem ecuaţia echivalentă $(c+6)(d+6)=36$, cu $c,d\in\mathbb{Z}$	**2p**
De exemplu, pentru $c+6=2$ şi $d+6=18$, obţinem $c=-4, d=12$ care verifică ipoteza	**2p**

Problema 4.

Punctele *S*, *Q* și *R* sunt mijloacele muchiilor $[A'D']$, $[AB]$ și respectiv $[CC']$ ale cubului $[ABCDA'B'C'D']$ cu $AB=a$. Calculaţi distanţa de la punctul *B* la planul (SQR) .

Planele $(A'BC')$ şi $(AD'C)$ sunt paralele. Deoarece *S*, *Q* și *R* sunt mijloacele segmentelor $[A'D']$, $[AB]$ și respectiv $[CC']$, conform *reciprocei teoremei lui Thales în spaţiu*, deducem că planul (SQR) este paralel cu planele $(A'BC')$ şi $(AD'C)$ şi egal distanţat de ele.	**1 p** **2p**
Distanţa dintre planele $(A'BC')$ şi $(AD'C)$ este egală cu $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Cum *B* este situat în planul $(A'BC')$, înseamnă că distanţa de la *B* la planul (SQR) este egală cu $a\frac{\sqrt{3}}{6}$.	**2p** **2p**

CLASA a 9-a

1. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2|x-a| + 3|x+a| = 12$ are exact două soluţii.

***

Soluţie. După cum $a \geqslant 0$ sau $a < 0$, mulţimea valorilor funcţiei date de membrul stâng este

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -a & & a & & \infty \\ \hline f(x) & \infty & \searrow & 4a & \nearrow & 6a & \nearrow & \infty \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & a & & -a & & \infty \\ \hline f(x) & \infty & \searrow & -6a & \searrow & -4a & \nearrow & \infty \end{array}$$ **3p**

Pentru a avea două soluţii este necesar şi suficient ca valoarea minimă $4|a|$ să fie mai mică decât 12 .... **3p**

Obţinem răspunsul $a \in (-3,3)$ **1p**

2. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x-2016]^n + [2017-x]^n = 2$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Marcelina Popa, Tulcea

Soluţie. Să observăm mai întâi că x nu poate fi număr întreg. Într-adevăr, dacă x ar fi întreg, ecuaţia ar deveni $(x-2016)^n + (2017-x)^n = 2$, relaţie imposibilă, fiindcă numerele $x-2016$ şi $2017-x$ au parităţi diferite, deci suma lor este impară **2p**

Avem $[x-2016] = [x]-2016$ şi $[2017-x] = 2017+[-x]$. Cum $x \notin \mathbb{Z}$, rezultă că $[-x] = -[x]-1$, deci $[2017-x] = 2016-[x]$. Atunci ecuaţia devine $([x]-2016)^n + (2016-[x])^n = 2$ **2p**

Dacă n este impar, ecuaţia nu are soluţii **1p**

Dacă n este par, ecuaţia capătă forma $2([x]-2016)^n = 2$, de unde $[x]-2016 = \pm 1$. Dacă $[x]-2016 = 1$, obţinem că $x \in [2017,\ 2018)$. Dacă $[x]-2016 = -1$, obţinem că $x \in [2015,\ 2016)$. Dar x nu poate fi întreg, deci în final obţinem $x \in (2015, 2016) \cup (2017, 2018)$ **2p**

3. Determinaţi cel mai mic număr natural n care are proprietatea: oricum am lua n vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ în plan, există unul dintre ei – de exemplu $\overrightarrow{v_n}$ – şi numerele reale nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ astfel încât $\overrightarrow{v_n} = x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + x_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}}$.

***

Soluţie. Arătăm că $n_{\min} = 5$ **1p**

Pentru $n = 4$, dacă luăm vectorii necoliniari $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi opuşii lor, atunci o egalitate de forma $-\vec{i} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{j}$ ar implica $x = -1$, deci proprietatea nu este îndeplinită........... **2p**

Pentru $n = 5$, plasând vectorii cu originea în acelaşi punct, cel puţin unul dintre vectori se află în interiorul unghiului determinat de alţi doi vectori: în caz contrar, dacă îi numerotăm $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$, $\overrightarrow{v_5}$ „în ordinea unghiurilor făcute cu $\overrightarrow{v_1}$”, atunci am avea $\angle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2} + \angle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3} \geqslant 180°$ şi analoagele, de unde $360° = \angle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2} + \angle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3} + \ldots + \angle\overrightarrow{v_5},\overrightarrow{v_1} \geqslant 450°$, imposibil......... **2p**

Astfel avem, de exemplu, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{OC}$, cu $B \in \operatorname{Int}\widehat{AOC}$. În acest caz, dacă $D = OB \cap AC$, atunci $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OC}$, cu $0 < x < 1$ şi $\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OD}$, cu $y > 0$, deci $\overrightarrow{v_2} = yx\overrightarrow{v_1} + y(1-x)\overrightarrow{v_3} + 0\overrightarrow{v_4} + 0\overrightarrow{v_5}$ **2p**

4. a) Se consideră numerele reale $a, b, c \in (-2, \infty)$ cu proprietatea $a+b+c = -3$. Să se arate că $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{b}{b+2} + \dfrac{c}{c+2} \leqslant -3$. Când are loc egalitatea?

b) Se consideră numerele reale $a, b, c \in (-\infty, -2)$ cu proprietatea $a+b+c = -9$. Să se arate că $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{b}{b+2} + \dfrac{c}{c+2} \geqslant 9$. Când are loc egalitatea?

Petre Guţescu, Tulcea

Soluţie a) Pentru orice $x \in (-2, \infty)$ putem scrie $2(x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+1) \geqslant x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} \leqslant 2x+1$. (1) Dând, pe rând, lui x valorile a, b, c în relaţia (1), adunând membru cu membru relaţiile astfel obţinute şi ţinând seama de relaţia din enunţ, se obţine inegalitatea cerută. Egalitatea înseamnă egalitate în (1), adică $a = b = c = -1$ **4p**

b) Pentru orice $x \in (-\infty, -2)$ putem scrie $2(x+3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 18 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x+9)(x+2) \geqslant x \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} \geqslant 2x+9$ (2) Dând, pe rând, lui x valorile a, b, c în relaţia (2), adunând membru cu membru relaţiile astfel obţinute şi ţinând seama de relaţia din enunţ, se obţine inegalitatea dorită. Egalitatea înseamnă egalitate în (2), adică $a = b = c = -3$ **3p**

CLASA a 10-a

1. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie cu proprietatea $|f(x) + f(y) + f(z)| \leqslant |f(x + y + z)|$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{C}$. Arătaţi că $f(x) + f(y) = f(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

George Stoica, Canada

Soluţie. Avem $3|f(0)| \leqslant |f(0)|$, deci $f(0) = 0$ şi $|f(x) + f(-x)| \leqslant |f(0)| = 0$, deci $f(-x) = -f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{C}$ **3p**

Deducem $|f(x) + f(y) - f(x + y)| = |f(x) + f(y) + f(-x - y)| \leqslant |f(x + y - x - y)| = 0$, de unde concluzia **4p**

2. Determinaţi funcţiile crescătoare $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care au proprietatea $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

Petre Guţescu, Tulcea

Soluţie. Arătăm că $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ **1p**

Dacă presupunem $f(n) \leqslant n$ pentru un anumit n, atunci $f(f(n)) \leqslant f(n) \leqslant n$, ceea ce duce la $f(f(n)) + f(n) \leqslant 2n$ – contradicţie, deci $f(n) \geqslant n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ **3p**

Dacă presupunem $f(n) \geqslant n+2$ pentru un anumit n, atunci $f(f(n)) \geqslant f(n+2) \geqslant n+3$, deci $f(f(n)) + f(n) \geqslant 2n + 5$ – contradicţie. Rămâne astfel $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ **3p**

3. Arătaţi că $\dfrac{\sqrt[3]{17 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{17 - \sqrt{297}} - 1}{3}$ este soluţie a ecuaţiei $x^4 + 1 = 2\sqrt[4]{2x - 1}$.

Eugen Radu, Bucureşti

Soluţie. Dacă luăm $f : [0, \infty) \to [1/2, \infty)$, $f(x) = (x^4 + 1)/2$, atunci ecuaţia se poate scrie $f(x) = f^{-1}(x)$ şi are printre soluţii şi pe cele ale ecuaţiei $f(x) = x$ **2p**

Ultima ecuaţie este $x^4 - 2x + 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 1)$ **2p**

Arătăm că numărul dat α anulează cel de-al doilea factor. Observăm că $(3\alpha + 1)^3 = 34 + 3\sqrt[3]{17 + \sqrt{297}}\sqrt[3]{17 - \sqrt{297}}(3\alpha+1)$, deci $(3\alpha+1)^3 = 34+3\sqrt[3]{-8}(3\alpha+1)$, de unde $27\alpha^3+27\alpha^2+9\alpha + 1 = 34 - 18\alpha - 6$, sau $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$ **3p**

4. Arătaţi că, dacă $\sin 2x$ şi $\sin 3x$ sunt numere raţionale, atunci $\sin nx$ este număr raţional, oricare ar fi numărul natural n.

Mihail Bălună, Bucureşti

Soluţie. Din ipoteză rezultă $\cos 4x \in \mathbb{Q}$ şi $\cos 6x \in \mathbb{Q}$. Apoi $\cos 2x + \cos 6x = 2\cos 2x \cos 4x$ implică $\cos 2x \in \mathbb{Q}$ sau $2\cos 4x - 1 = 0$; în al doilea caz ar reieşi $4x = \pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $3x = \pm\pi/4 + 3k\pi/2$, în contradicţie cu $\sin 3x \in \mathbb{Q}$ **2p**

Mai departe $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin x \sin 3x$ implică $\sin x \in \mathbb{Q}$ sau $\sin 3x = 0$; în al doilea caz reiese $x = k\pi/3$, iar $\sin 2x \in \mathbb{Q}$ duce la $k = 3l$, $l \in \mathbb{Z}$. Astfel, în toate cazurile, $\sin x \in \mathbb{Q}$ . . . **3p**

În plus, din $\sin x \in \mathbb{Q}$ şi $\sin 2x \in \mathbb{Q}$ rezultă imediat $\cos x \in \mathbb{Q}$ **1p**

Soluţia se finalizează acum inductiv, arătând că $\sin nx \in \mathbb{Q}$ şi $\cos nx \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$ **1p**

CLASA a 11-a

1. Fie n un număr natural nenul şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = I_n$, $B^2 = 2I_n$ şi $AB = BA$. Arătaţi că, dacă a, b sunt numere întregi, nu ambele nule, atunci matricea $aA + bB$ este inversabilă.

***

Soluţie. Fie $C = aA + bB$. Atunci $(C - aA)^2 = 2b^2 I_2$, deci $C^2 - 2aAC = (2b^2 - a^2)I_2$ ... **3p**

Egalitatea $2b^2 - a^2 = 0$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ este posibilă doar dacă $a = b = 0$ **2p**

Deducem astfel $\det C \det(C - 2A) \neq 0$, de unde concluzia................................ **2p**

2. Fie ABC un triunghi în plan, având vârfurile de coordonatele întregi, aria S şi care verifică relaţia $(AB + AC)^2 < 8S + 1$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

***

Soluţie. Avem $(AB + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \geqslant AB^2 + AC^2 + 4S$ iar numerele $AB^2 + AC^2 + 4S$ şi $8S + 1$ sunt întregi, deci $AB^2 + AC^2 + 4S \leqslant 8S$ **3p**

Rezultă $AB^2 + AC^2 \leqslant 4S \leqslant 2AB \cdot AC$, de unde $AB = AC$ **2p**

În plus, ipoteza duce la $2S \geqslant AB \cdot AC$, ceea ce implică $\sin A \geqslant 1$, de unde $A = \pi/2$ **2p**

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ şi d_n cel mai mare divizor comun al elementelor matricei $A^n - I_2$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

***

Soluţie. Avem $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix}$ **2p**

Apoi $a_n^2 - 2b_n^2 = (\det A)^n = 1$, deci $(a_n - 1)(a_n + 1) = 2b_n^2$ **2p**

Cum $(a_n - 1, a_n + 1)$ este 1 sau 2, deducem că $a_n - 1$ sau $(a_n - 1)/2$ este un pătrat perfect p_n şi $p_n | a_n - 1, p_n | b_n$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, reiese $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$.............................. **3p**

4. Vom spune că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip *zero plus* dacă are termeni strict pozitivi şi limita 0.

a) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus şi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, atunci şirul $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 0.

b) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ are limită, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1.

c) Daţi un exemplu de şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tip zero plus şi de funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ să nu aibă limită.

Mihail Bălună

Soluţie. a) În afara oricărei vecinătăţi a lui 0 se află acelaşi număr de termeni ai şirului $x_{f(n)}$ ca ai şirului x_n, deci un număr finit **2p**

b) Cu raţionamentul de mai sus, este suficient să arătăm că $y_{u(n)} \to 1$ pentru o bijecţie $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definim u astfel încât $(x_{u(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ să fie descrescător. Avem următoarea lemă.

Lemă. *Dacă* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *este o bijecţie, atunci mulţimile* $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \geqslant n\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \leqslant n\}$ *sunt infinite.*

Într-adevăr, dacă am avea $A = \{n_1, \dots, n_k\}$ şi $m > \varphi(n_i)$, $i = \overline{1, k}$, atunci mulţimea cu $m+1$ elemente distincte $\{\varphi(0), \dots, \varphi(m)\}$ ar fi inclusă în mulţimea $\{0, \dots, m-1\}$ – imposibil. Analog reiese că presupunerea că B este mulţime finită duce la o contradicţie. □

Folosind lema deducem că şirul $(y_{u(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ are un subşir cu termeni $\geqslant 1$ (pentru indicii la care $u(f(n)) \geqslant n$) şi un subşir cu termeni $\leqslant 1$ (pentru $u(f(n)) \leqslant n$), de unde concluzia......... **3p**

c) Dacă $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ şi $f(n) = n + 1$ dacă n este par, $f(n) = n - 1$ dacă n este impar, atunci $\dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ este alternativ 2 şi $\dfrac{1}{2}$, deci nu are limită... **2p**

CLASA a 12-a

1. Calculaţi
$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$$

***

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x = 6 - t$ obţinem
$$I = \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(3+t)}}{\sqrt{\ln(3+t)}+\sqrt{\ln(9-t)}}(-1)\,\mathrm{d}t = J, \qquad \ldots\ldots\ldots \mathbf{4p}$$
iar $I + J = \int_2^4 1\,\mathrm{d}x = 2$, deci $I = 1$ **3p**

2. Fie M o mulţime dotată cu o lege de compoziţie asociativă „$\cdot$", având proprietăţile:
i) dacă $x, y, z \in M$ şi $xy = xz$ sau $yx = zx$, atunci $y = z$;
ii) pentru orice $x \in M$, mulţimea $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.
Arătaţi că $(M, \cdot)$ este grup.

***

Soluţie. Să fixăm $a \in M$. Deoarece mulţimea $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită, există $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$ astfel încât $a^p = a^q$. Arătăm că $e = a^{p-q}$ este element neutru **2p**

Într-adevăr, dacă $x \in M$ atunci $a^p x = a^q x$ de unde, conform i), $a^{p-q}x = x$, adică $ex = x$. În mod similar deducem $xe = x$, $\forall x \in M$ **3p**

Luând acum $x \in M$ oarecare, există $p, q \in \mathbb{N}$, $p - 1 > q > 0$, astfel încât $x^p = x^q$, ceea ce arată că x are inversul x^{p-q-1} **2p**

3. Determinaţi valoarea maximă a integralei $\displaystyle\int_0^y \sqrt{x^4 + (y - y^2)^2}dx$ pentru $0 \leqslant y \leqslant 1$.

***

Soluţie. Avem $I \leqslant \displaystyle\int_0^y (x^2 + (y - y^2))dx = y^2 - \frac{2y^3}{3} \leqslant \frac{1}{3}$ **4p**

Cum pentru $y = 1$ obţinem $I = \dfrac{1}{3}$, reiese că maximul cerut este $\dfrac{1}{3}$ **3p**

4. Fie $(L, +, \cdot)$ un corp comutativ în care $1 + 1 \neq 0$. Arătaţi că soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \in L$ sunt $(1, 0)$ şi perechile de forma $((r^2 - 1)(r^2 + 1)^{-1}, 2r(r^2 + 1)^{-1})$, unde $r \in L$, $r^2 \neq -1$.

***

Soluţie. Prin verificare directă, rezultă că perechile enumerate în enunţ sunt soluţii **2p**

Reciproc, dacă o pereche (x, y) este soluţie şi $x \neq 1$, fie $r = y(1 - x)^{-1}$ **2p**

Atunci $r^2 = y^2(1 - x)^{-2} = (1 - x^2)(1 - x)^{-2} = (1 + x)(1 - x)^{-1}$, de unde $(1 - x)r^2 = 1 + x$, sau $x = (r^2 - 1)(r^2 + 1)^{-1}$ **2p**

De asemenea, $y = r(1 - x) = r\left(r^2 + 1 - (r^2 - 1)\right)(r^2 + 1)^{-1} = 2r(r^2 + 1)^{-1}$ **1p**